

ЛЕКЦИЯ 5

§5. Шешімнің орнықтылығы

2.1. Автономды теңдеулердің қалыпты жүйесін қарастырайық:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (1)$$

Мұндағы $f(x)$ векторы кейбір $D \subset R^n$ облысында анықталған және үздіксіз дифференциалданатын функция деп есептелінеді.

Айталық, a -нүктесі (1) жүйенің теңбе-теңдік қалпы болсын:

$$f(a) = 0 \quad (2)$$

ал $x = \varphi(t, x^0)$ функциясы жүйенің бастапқы

$$\varphi(0, x^0) = x^0 \quad (3)$$

шартын қанағаттандыратын шешім болсын.

Анықтама-1. Жүйенің теңбе-теңдік қалпы $x = a$ Ляпунов бойынша орнықты деп аталынады, егер:

1) кез келген $\delta_0 > 0$ саны үшін $\|x^0 - a\| < \delta_0$ теңсіздігін

қанағаттандыратын $x = \varphi(t, x^0)$ шешім t -ның барлық оң мәндерінде анықталса,

2) кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып,

$\|x^0 - a\| \leq \delta$ теңсіздігінен $\|\varphi(t, x^0) - a\| \leq \varepsilon, \forall t \geq 0$ теңсіздігі шықса.

Анықтама-2. Теңбе-теңдік қалып асимптотикалы орнықты деп аталынады, егер ол Ляпунов бойынша орнықты болса және қосымша

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, x^0) = a$$

шарты орындалса.

Анықтама-3. Теңбе-теңдік қалып Ляпунов бойынша орнықсыз деп аталынады, егер қаншалықты кіші $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылмасын, $\|x^0 - a\| \leq \delta$ теңсіздігінен $\|\varphi(t, x^0) - a\| \leq \varepsilon$ теңсіздігі шықпаса.

2.2. Бұл анықтамалардың бәріне геометриялық түсініктеме беруге болады.

Алдын ала ескерте кететін жағдай: теңбе-теңдік $x = a$ қалпы үшін координат жүйесінің бас нүктесін алуға болады, яғни $a = 0$ деп алуға болады (ол үшін параллельдік көшіру жасасақ, жеткілікті).

Бұл жағдайда орнықтылықты қысқаша анықтауға болады: теңбе-теңдік $x = 0$ қалпы Ляпунов бойынша орнықты деп аталынады, егер кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін кейбір $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, мынандай теңсіздіктер орындалса:

$$\|x^0\| \leq \delta \Rightarrow \|\varphi(t, x^0)\| \leq \varepsilon, \forall t \geq 0 \quad (4)$$

Ал асимптотикалық орнықты болу үшін қосымша

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x^0) = 0 \quad (5)$$

шарты орындалуы керек.

Соңғы теңсіздіктерге төмендегідей геометриялық түсініктеме беруге болады.

Фазалық R_x^n кеңістігінде центрлері координат жүйесінің басында жатқан радиустері сәйкес δ және ε сандарына тең центрлес сфералар жүргізейік. Бұлардың радиустері әртүрлі қатынаста болуы мүмкін. Айқын болуы үшін $\delta < \varepsilon$ болсын. Сонда орнықты дегеніміз – радиусы δ -ға тең сфераның ішінен басталған траектория радиусы ε -ге тең сфераның ішінен шықпайды дегенді білдіреді. Ал асимптотикалық орнықты дегеніміз – радиусы сол δ -ға тең сфераның ішінен басталған траектория t -ның мәні өскен сайын координат жүйесінің бас нүктесіне шексіз жақындайды дегенді білдіреді. Орнықсыздық дегеніміз – қаншалықты кіші мәнді $\delta > 0$ саны табылмасын, кіші сфераның ішінен басталған траектория белгілі бір мезеттен бастап үлкен сфераның сыртына шығады дегенді білдіреді.

Негізгі теоремалар

3.1. Теңдеудің белгілі бір шешімінің орнықтылығын зерттеу оның жалпы, не дара шешімдері белгілі болса, қиындық тудырмайды. Ал шешім айқын түрде табыла бермейді. Ляпунов өз зерттеулерінде кейбір шарттарды қанағаттандыратын арнаулы функциялар енгізу арқылы теңдеуді шешпей-ақ, оның нөлдік шешімінің орнықтылығын анықтауға болатынын көрсетті. Бұл әдісті Ляпуновтың екінші әдісі деп атайды. Енді осы әдістен шығатын кейбір тұжырымдарды келтірейік.

Анықтама-1. Үздіксіз дифференциалданатын $V(x)$ функциясы $x=0$ нүктесінің кейбір U аймағында анықталған оң таңбалы деп аталынады, егер

$$V(x) > 0, \forall x \neq 0, V(0) = 0$$

Ал егер $V(x) < 0, \forall x \neq 0, V(0) = 0$ болса, онда $V(x)$ функциясы анықталған теріс таңбалы деп аталынады.

Анықтама-2. $V(x)$ функциясы U аймағында тұрақты таңбалы деп аталады, егер ол осы аймақта тек бір ғана таңбалы мән қабылдаса, ал нөлге координат жүйесінің бас нүктесінен басқа нүктелерде де айналып жатса.

Анықтама-3. Анықталған оң таңбалы $V(x)$ функциясы Ляпунов функциясы деп аталынады, егер оның берілген жүйе, не теңдеу бойынша алынған туындысы теріс таңбалы болса.

Бұл анықтаманы теріс таңба арқылы беруге де болады: анықталған теріс таңбалы $V(x)$ функциясы Ляпунов функциясы деп аталады, егер оның берілген жүйе, не теңдеу бойынша алынған туындысы оң таңбалы болса. Жалпы, $V(x)$ функциясы Ляпунов функциясы болу үшін оның жүйе бойынша алынған туындысының таңбасы кері болуы немесе нөлге тең болуы шарт.

Теорема-1 (Ляпуновтың орнықтылық туралы теоремасы). Егер жүйенің теңбе-теңдік қалпы $x=0$ нүктесінің кейбір U аймағында $V(x)$ Ляпунов функциясы бар болса, онда $x=0$ теңбе-теңдік қалып Ляпунов мағынасында орнықты болады.

Дәлелдеуі. $V(x)$ функциясы анықталған оң таңбалы болсын. $x=0$ нүктесінің U аймағында $K_\varepsilon: \|x\| \leq \varepsilon$ шарын қарастырайық. S_ε -сол шардың сферасы (шекарасы) болсын, $S_\varepsilon: \|x\| = \varepsilon$. S_ε - шектелген тұйық жиын болғандықтан, ал $V(x)$ - үздіксіз функция болғандықтан, әрі $V(x) > 0$ деп алынғандықтан,

$$\min_{x \in S_\varepsilon} V(x) = K > 0$$

Енді $K_\delta: \|x\| \leq \delta$ шарын алайық. $V(0) = 0$ болғандықтан, $\delta > 0$ санын соншалықты кіші етіп алуға болады және сол δ үшін

$$V(x) < K, x \in K_\delta.$$

Енді егер $\|x^0\| \leq \delta$ деп алсақ, онда $\|x(t, x^0)\| \leq \varepsilon$ болатынын көрсетейік ($0 \leq t < \infty$). U аймағында $\dot{V}(x) \leq 0$ болғандықтан, яғни $V(x)$ монотонды өспейтін функция болғандықтан, $V(x^0) < K$ және кез келген $0 \leq t < \infty$ аралығында $x = x(t, x^0)$ шешімінің бойында $V(x) < K$ теңсіздігі орындалады. Сондықтан, K_δ шарының ішінен басталатын траектория K_ε шарынан шығып кете алмайды, өйткені $x \in S_\varepsilon$ болғанда $V(x) \geq K$, ал траектория бойында $V(x) < K$. Осыдан $\|x(t, x^0)\| \leq \varepsilon$ болатынын көреміз, яғни нөлдік шешім орнықты.

Теорема-2 (Ляпуновтың асимптотикалық орнықтылық туралы теоремасы). Егер жүйенің теңбе-теңдік нөлдік қалпының кейбір аймағында анықталған оң таңбалы $V(x)$ функциясы бар болса, ал оның жүйе бойынша алынған толық туындысы анықталған теріс таңбалы болса, онда теңбе-теңдік қалып асимптотикалық орнықты болады.

Дәлелдеуі. Алдыңғы теореманың дәлелдеуінде келтірілген K_ε және K_δ шарлары үшін $\|x^0\| \leq \delta$ болғанда $\|x(t, x^0)\| \leq \varepsilon$ теңсіздігі орындалатыны көрсетілді. Енді $W(t) = V(x(t, x^0))$ функциясын қарастырайық. $\dot{V}(x) < 0$ болғандықтан, $W(t)$ функциясы кемімелі болады және оның шегі бар: $\lim_{t \rightarrow \infty} W(t) = A$.

Осындағы A санының нөлге тең болатынын көрсетейік (егер $A = 0$ болса, онда теорема орындалып тұр). Кері жорық, $A > 0$ болсын. Бұл жағдайда шекке көшкенге дейін $t \geq 0$ үшін $W(t) \geq A$ шарты орындалады және кейбір α саны үшін ($0 < \alpha < \varepsilon$) $\|x(t, x^0)\| \geq \alpha$ теңсіздігі орын алады (Кері жағдайда, $V(x)$ функциясы траектория бойында өте кіші аз мән қабылдаған болар еді). Теореманың шарты бойынша $\alpha \leq \|x(t, x^0)\| \leq \varepsilon$ теңсіздіктері арқылы анықталатын екі шар аралығында $\dot{V}(x(t, x^0)) \leq -\beta$, ($\beta > 0$), яғни

$$W'(t) = \dot{V}(x(t, x^0)) \leq -\beta$$

Осыдан $[0, t)$ аралығында интеграл алсақ:

$$W(t) - W(0) \leq -\beta t$$

Немесе

$$W(t) \leq -\beta t + W(0)$$

Бұл қатынастың оң жағы $t > \frac{W(0)}{\beta}$ болғанда теріс мән қабылдайды, бұл $V(x)$ функциясының анықталған оң таңбалы екеніне қарама-қарсы. Осы қайшылық теореманы дәлелдейді.

Теорема-3 (Четаевтың орнықсыздық туралы теоремасы). Айталық, кейбір $U_1 \subset U$ аймағында үздіксіз дифференциалданатын $V(x)$ функциясы төмендегідей шарттарды қанағаттандырсын:

$$1) V(x) > 0, \dot{V}(x) > 0, \forall x \in U_1,$$

2) U_1 аймағының U облысына жататын ішкі шекара нүктелерінде $V(x) = 0$ болсын. Бұл жағдайда жүйенің теңбе-теңдік қалпы орнықсыз.

Дәлелдеуі. U_1 аймағының x^0 нүктесінен шығатын $x = x(t, x^0)$ шешімнің траекториясы γ болсын. Осы траектория бойымен алынған $W(t) = V(x(t, x^0))$ функциясы $\gamma \subset U_1$ болғанда

$W(0) > 0, W'(t) = \dot{V}(x) > 0$ теңсіздіктерін қанағаттандырады. Сондықтан, сол $\gamma \subset U_1$ үшін $W(t) > 0$ теңсіздігі орын алады, яғни ол қатаң өсетін функция. Бұл жағдайда траектория $V(x) = 0$ теңдігі орындалатын ішкі шекара нүктелерді басып өте алмайды, бірақ ол өсіп отыратын болғандықтан, U_1 аймағынан шығып кетеді. Сондықтан, теңбе-теңдік қалып орныксыз.

Теорема-4. Автономды жүйенің анықталған оң таңбалы интегралы бар болса, ол жүйенің теңбе-теңдік қалпы орнықты.

Дәлелдеуі. Егер анықталған оң таңбалы $V(x)$ функция жүйенің интегралы болса, онда анықтама бойынша $\dot{V}(x) \equiv 0$ тепе-теңдігі орындалады. Сондықтан, $V(x)$ функциясы Ляпуновтың бірінші теоремасының шарттарын қанағаттандырып тұр, яғни нөлдік шешім орнықты.

Теорема-5. Айталық, $x=0$ нүктесі берілген жүйенің теңбе-теңдік қалпы болсын, ал $V(x)$ Ляпунов функциясы үшін

$$\dot{V}(x) \leq -\alpha V(x), V(x) \geq A\|x\|^\beta, (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (6)$$

шарттары орындалсын. Бұл жағдайда кейбір C саны үшін

$$\|x(t, x^0)\| \leq C e^{-\frac{\alpha t}{\beta}}, \forall t \in [0, \infty) \quad (7)$$

теңсіздігі орындалады.

Дәлелдеуі. $x = x(t, x^0)$ шешімі үшін $W(t) = V(x(t, x^0))$ функциясын құрайық. Теорема шарты бойынша: $W'(t) \leq -\alpha W(t)$ немесе $(\ln W(t))' \leq -\alpha$. Осыдан $[0, t)$ аралығында интеграл алсақ, $W(t) \leq W(0)e^{-\alpha t}$ қатынасын аламыз. (6) теңсіздіктердің екіншісін пайдалансақ,

$$A\|x(t, x^0)\|^\beta \leq V(x(t, x^0)) \leq V(x^0)e^{-\alpha t}, t > 0$$

қатынастары шығады, ал бұдан (7) теңсіздік оңай шығады. Ол үшін теңсіздіктің екі жағын A санына бөліп, түбір тапсақ, жеткілікті.